＊学术论文＊

拟共形扩张的伸缩商估计*

朱华成 周泽民 陈纪修

(复旦大学数学研究所,上海 200433)

摘要 设 $h(x)$是实轴的保向同胚,满足 $h(\pm\infty)=\pm\infty$.若它的拟对称函数 $\rho(x,t)=\dfrac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)}$满足 $\rho(t)$-拟对称条件:$\rho(t)^{-1}\leqslant\rho(x,t)\leqslant\rho(t),x\in\mathbb{R},t\in(0,\infty)$,令 $\rho^*(t)=\sup\left\{\rho(s),\ s\in\left[\dfrac{t}{2},t\right]\right\}$,则 $h(x)$的 Beurling-Ahlfors 扩张的伸缩商 $D(z)$具有下述估计:

$$D(x+iy)\leqslant 2\rho^*(y).$$

其中系数2不能进一步改进.

关键词 拟对称函数 Beurling-Ahlfors 扩张

设 $h(x)$是 $R\to R$ 的自同胚,$h(\pm\infty)=\pm\infty$。它的拟对称函数为

$$\rho(x,t)=\frac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)},\ x\in\mathbb{R},\ t>0.$$

若存在 $\rho\geqslant1$,使 $\rho(x,t)$满足下述 ρ-条件

$$\rho^{-1}\leqslant\rho(x,t)\leqslant\rho,\ x\in\mathbb{R},\ t>0,$$

则称 $h(x)$是 ρ-拟对称函数.记 $H=\{z:\mathrm{Im}z>0\}$,Beurling 和 Ahlfors 证明[1]

$h(x)$具有 $H\to H$ 的拟共形扩张的充分必要条件是 $h(x)$是 ρ-拟对称函数($\rho\geqslant1$ 为常数),并且建立了下述 Beurling-Ahlfors 扩张函数 $\phi(z)$

$$\phi(z)=\frac{1}{2y}\int_{x-y}^{x+y}h(t)\mathrm{d}t+\frac{i}{2y}\left(\int_{x}^{x+y}h(t)\mathrm{d}t-\int_{x-y}^{x}h(t)\mathrm{d}t\right).$$

记 $\phi(z)$的伸缩商为 $D(z)$,$D(z)=\dfrac{|f_z(z)|+|f_{\bar z}(z)|}{|f_z(z)|-|f_{\bar z}(z)|}$,Lehtinnen 证明[2]:

若是 $h(x)$是 ρ-拟对称函数,则关于它的 Beurling-Ahlfors 扩张的伸缩商,成立不等式 $D(x+iy)\leqslant2\rho$.陈纪修等在文献[3]中研究了上述问题的推广情况,假设 $h(x)$的拟对称函数 $\rho(x,t)$满足下述 $\rho(t)$-拟对称条件

$$\rho(t)^{-1}\leqslant\rho(x,t)\leqslant\rho(t),\ x\in\mathbb{R},\ 0<t<\delta,\tag{1}$$

其中 $\rho(t)$是$(0,\delta)$中的单调递减函数,而当 $t\to0^+$时,允许 $\rho(t)$以任意的增长阶趋于 $+\infty$.

1999-09-17 收稿,2000-01-31 收修改稿

* 国家自然科学基金资助项目(批准号:19871014)

对于 $h(x)$ 的 Beurling-Ahlfors 扩张，由于 $\phi(z)\in\mathbb{C}^1$，所以它的伸缩商在 H 是局部有界的，而当 z 趋于 H 的边界(实轴)时，$D(z)$ 则可能无界．文献[3]证明了其增长速度受到 $\rho(t)$ 增长速度的控制，即得到了估计1)

$$D(x+iy)\leqslant 4\rho\left(\frac{y}{2}\right)+c,\ x\in\mathbb{R},\ y\in(0,\delta),$$

其中 c 是常数($=4.25$)．

我们注意到，当 $\rho(t)$ 退化为常数时，关于 Beurling-Ahlfors 扩张的伸缩商 $D(x+iy)$ 的上界是 2ρ，由此可知文献[3]中的估计是不精确的．本文将条件(1)做了拓展，假定关于 $h(x)$ 的 $\rho(t)$-拟对称条件对一切 $t\in(0,+\infty)$ 成立

$$\rho(t)^{-1}\leqslant\rho(x,t)\leqslant\rho(t),\ x\in\mathbb{R},\ t\in(0,+\infty).\tag{2}$$

并设

$$\rho^*(t)=\sup\left\{\rho(s),\ s\in\left[\frac{t}{2},t\right]\right\},\tag{3}$$

对一切 $t>0$ 存在．本文的主要结果是

定理　若 $h(x)$ 是 $R\to R$ 的自同胚，$h(\pm\infty)=\pm\infty$，且 $h(x)$ 的拟对称函数 $\rho(x,t)$ 满足(2)与(3)式，那么 $h(x)$ 的 Beurling-Ahlfors 扩张 $\phi(z)$ 在点 $z=x+iy$ 的伸缩商有如下估计：

对一切 $x\in\mathbb{R}$ 与 $y>0$，成立

$$\begin{cases}D(x+iy)\leqslant 2\rho^*(y),\ \rho^*(y)>3\\ D(x+iy)\leqslant 2\rho^*(y)+1,\ 1\leqslant\rho^*(y)\leqslant 3.\end{cases}$$

其中系数 2 不能再进一步改进．

Beurling-Ahlfors 扩张的伸缩商估计

我们沿用文献[3]的记号，不妨假定 $h(x)$ 是 $R\to R$ 的规范化自同胚即 $h(0)=0$，$h(1)=1$，$h(\infty)=\infty$，根据文献[3]中的讨论，若要估计 $\phi(z)$ 在点 $z=x+iy$ 的伸缩商 $D(x+iy)$，我们只须估计 $\phi(z)$ 在 $z=i$ 这一点的伸缩商 $D(i)$．但在定理的条件下我们估计 $D(i)$ 的值时相应的条件(2)式应改为[3]

$$\frac{1}{\rho(ty)}\leqslant\rho(x,t)\leqslant\rho(ty),\ x\in\mathbb{R},\ t\in(0,\infty).\tag{4}$$

记

$$\beta=-h(-1),\ \xi=1-\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t,\ \eta=1+\frac{1}{\beta}\int_{-1}^0 h(t)\mathrm{d}t,$$

其中 β 满足 $\frac{1}{\rho^*(y)}<\beta<\rho^*(y)$．由于

$$H(\xi,\eta)=D(i)+\frac{1}{D(i)}=\frac{1}{\xi+\eta}\left[\beta(1+\eta^2)+\frac{1}{\beta}(1+\xi^2)\right],$$

我们只需求 $H(\xi,\eta)$ 的上界．

证明定理我们需要两个引理．

1) 文献[3]的引理 2 的推导中，$\rho(y)$ 应改为 $\rho\left(\frac{y}{2}\right)$，所以得到的估计式 $D(x+iy)\leqslant 4\rho(y)+c$ 应改为 $D(x+iy)\leqslant 4\rho\left(\frac{y}{2}\right)+c$

引理 1 如果 $h(x)$是 $R\to R$ 的规范化自同胚，且 $\rho^*(t)$，ξ，η，β 如前定义，那么

$$2\xi+\frac{\beta\eta}{1+\rho^*(y)}\geqslant\frac{1+\beta}{1+\rho^*(y)},\tag{5}$$

$$2\beta\eta+\frac{\xi}{1+\rho^*(y)}\geqslant\frac{1+\beta}{1+\rho^*(y)}.\tag{6}$$

证明 关于(5)式,由 $\rho(x,t)$满足(4)式有

$$\frac{h(1)-h(t)}{h(t)-h(2t-1)}\geqslant\frac{1}{\rho((1-t)y)},$$

$$h(t)\leqslant\frac{\rho((1-t)y)+h(2t-1)}{1+\rho((1-t)y)}.$$

两边从 0 到$\frac{1}{2}$积分，

$$\int_0^{\frac{1}{2}}h(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\rho((1-t)y)}{1+\rho((1-t)y)}\mathrm{d}y+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{h(2t-1)}{1+\rho((1-t)y)}\mathrm{d}t,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}h(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{\rho^*(y)}{2(1+\rho^*(y))}+\frac{1}{2(1+\rho^*(y))}\int_{-1}^0h(t)\mathrm{d}t,$$

我们得到

$$1-\xi=\int_0^1h(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{\rho^*(y)}{2(1+\rho^*(y))}+\frac{1}{2(1+\rho^*(y))}(\beta\eta-\beta)+\frac{1}{2},$$

所以

$$\xi+\frac{\beta\eta}{2(1+\rho^*(y))}\geqslant\frac{1+\beta}{2(1+\rho^*(y))}.$$

关于(6)式,由 $\rho(x,t)$满足(4)式有

$$\frac{h(2t+1)-h(t)}{h(t)-h(-1)}\leqslant\rho((1+t)y),$$

$$h(t)\geqslant\frac{h(2t+1)-\beta\rho((1+t)y)}{1+\rho((1+t)y)}.$$

两边从 $-\frac{1}{2}$到 0 积分，

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0h(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_{-\frac{1}{2}}^0\frac{h(2t+1)}{1+\rho((1+t)y)}\mathrm{d}t-\int_{-\frac{1}{2}}^0\frac{\beta\rho((1+t)y)}{1+\rho((1+t)y)}\mathrm{d}t$$

$$\geqslant-\frac{1}{2}\frac{\beta\rho^*(y)}{1+\rho^*(y)}+\frac{1}{2+2\rho^*(y)}\int_0^1h(t)\mathrm{d}t,$$

于是

$$\beta\eta-\beta=\int_{-1}^0h(t)\mathrm{d}t\geqslant-\frac{\beta\rho^*(y)}{2(1+\rho^*(y))}+\frac{1-\xi}{2(1+\rho^*(y))}-\frac{\beta}{2},$$

从而得到

$$2\beta\eta+\frac{\xi}{1+\rho^*(y)}\geqslant\frac{1+\beta}{1+\rho^*(y)}.$$

引理 2[4] 如果 $\xi,\eta,\rho(t)$如前所述，则

$$\xi < \frac{1+2\rho^*(\gamma)}{2(1+\rho^*(\gamma))}$$

$$\eta < \frac{1+2\rho^*(\gamma)}{2(1+\rho^*(\gamma))}$$

证明　由条件(4)式可知

$$\frac{1}{1+\rho^*(\gamma)} < h\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{\rho^*(\gamma)}{1+\rho^*(\gamma)}.$$

于是我们有

$$\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t > \int_{\frac{1}{2}}^1 h(t)\mathrm{d}t > \frac{1}{2}h\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2(1+\rho^*(\gamma))}$$

与

$$\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 h(t)\mathrm{d}t < \frac{1}{2}h\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}h(1) = \frac{1+2\rho^*(\gamma)}{2(1+\rho^*(\gamma))},$$

即

$$\frac{1}{2(1+\rho^*(\gamma))} < \int_0^1 h(t)\mathrm{d}t < \frac{1+2\rho^*(\gamma)}{2(1+\rho^*(\gamma))}.$$

从而得到

$$\xi < \frac{1+2\rho^*(\gamma)}{2(1+\rho^*(\gamma))}.$$

由对称性,又可得到

$$\eta < \frac{1+2\rho^*(\gamma)}{2(1+\rho^*(\gamma))}.$$

定理的证明　由引理 1 和引理 2 我们知道点(ξ,η)落在 $\xi\eta$ 平面上由 $\xi = \frac{1+2\rho^*(\gamma)}{2(1+\rho^*(\gamma))}$, $\eta = \frac{1+2\rho^*(\gamma)}{2(1+\rho^*(\gamma))}$, $2\xi + \frac{\beta\eta}{1+\rho^*(\gamma)} = \frac{1+\beta}{1+\rho^*(\gamma)}$,及 $2\beta\eta + \frac{\xi}{1+\rho^*(\gamma)} = \frac{1+\beta}{1+\rho^*(\gamma)}$所围成的区域内．由于 $H(\xi,\eta) = \frac{1}{\xi+\eta}\left[\beta(1+\eta^2) + \frac{1}{\beta}(1+\xi^2)\right]$是二维下凸的[1], $H(\xi,\eta)$只可能在 4 个顶点

$$A\left(\frac{2+2\rho^*(\gamma)+\beta}{4(1+\rho^*(\gamma))^2}, \frac{1+2\rho^*(\gamma)}{2(1+\rho^*(\gamma))}\right),$$

$$B\left(\frac{1+\beta}{2\rho^*(\gamma)+3}, \frac{1+1/\beta}{2\rho^*(\gamma)+3}\right),$$

$$C\left(\frac{1+2\rho^*(\gamma)}{2(1+\rho^*(\gamma))}, \frac{2+2\rho^*(\gamma)+1/\beta}{4(1+\rho^*(\gamma))^2}\right),$$

$$E\left(\frac{2\rho^*(\gamma)+1}{2(1+\rho^*(\gamma))}, \frac{2\rho^*(\gamma)+1}{2(1+\rho^*(\gamma))}\right),$$

处达到最大值．

下面分别估计 $H(\xi,\eta)$在 A,B,C,E 的值．

(1) $A\left(\frac{2+2\rho^*(\gamma)+\beta}{4(1+\rho^*(\gamma))^2}, \frac{1+2\rho^*(\gamma)}{2(1+\rho^*(\gamma))}\right)$

取点 $A_0\left(\frac{1}{2(1+\rho^*(y))}, \frac{1+2\rho^*(y)}{2(1+\rho^*(y))}\right)$. 由 $H(\xi,\eta)$的二维凸性，$H(\xi,\eta)$在 A 点的值小于在A_0点的值.

$$H(\xi,\eta) \leqslant \beta\left(1+\frac{(1+2\rho^*(y))^2}{4(1+\rho^*(y))^2}\right)+\frac{1}{\beta}\left(1+\frac{1}{4(1+\rho^*(y))^2}\right)$$

$$<\rho^*(y)\left(1+\frac{(1+2\rho^*(y))^2}{4(1+\rho^*(y))^2}\right)+\frac{1}{\rho^*(y)}\left(1+\frac{1}{4(1+\rho^*(y))^2}\right),$$

所以

$$\begin{cases}H(\xi,\eta) < 2\rho^*(y), (\rho^*(y) > 3)\\ H(\xi,\eta) < 2\rho^*(y)+1, (1 \leqslant \rho^*(y) \leqslant 3).\end{cases}$$

根据对称性在 C 点亦有

$$\begin{cases}H(\xi,\eta) < 2\rho^*(y), (\rho^*(y) > 3)\\ H(\xi,\eta) < 2\rho^*(y)+1, (1 \leqslant \rho^*(y) \leqslant 3).\end{cases}$$

(2) $E\left(\frac{2\rho^*(y)+1}{2(1+\rho^*(y))}, \frac{2\rho^*(y)+1}{2(1+\rho \backslash + *(y))}\right)$

$$H(\xi,\eta) < \frac{1+\rho^*(y)}{2\rho^*(y)+1}\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)\left[1+\frac{(1+2\rho^*(y))^2}{4(1+\rho^*(y))^2}\right]$$

$$<\frac{1+\rho^*(y)}{2\rho^*(y)+1}\left(\rho^*(y)+\frac{1}{\rho^*(y)}\right)\left[1+\frac{(1+2\rho^*(y))^2}{4(1+\rho^*(y))^2}\right] < 2\rho^*(y).$$

(3) $B\left(\frac{1+\beta}{2\rho^*(y)+3}, \frac{1+1/\beta}{2\rho^*(y)+3}\right)$

记 $\beta+\frac{1}{\beta}=p$, $2(\rho^*(y)+1)=s$, 于是

$$\xi+\eta=\frac{p+2}{s+1}, \beta(1+\eta^2)=\beta+\frac{p+2}{(s+1)^2}, \frac{1}{\beta}(1+\xi^2)=\frac{1}{\beta}+\frac{p+2}{(s+1)^2}.$$

从而

$$H(\xi,\eta)=s+1-\left(\frac{2s+2}{p+2}-\frac{2}{s+1}\right).$$

由于

$$\frac{2s+2}{p+2}-\frac{2}{s+1} \geqslant 3 \qquad (\rho^*(y) > 3),$$

$$\frac{2s+2}{p+2}-\frac{2}{s+1} \geqslant 2 \qquad (1 \leqslant \rho^*(y) \leqslant 3),$$

由此得到

$$\begin{cases}H(\xi,\eta) < s+1-3=2\rho^*(y), (\rho^*(y) > 3)\\ H(\xi,\eta) < s+1-2=2\rho^*(y)+1, (1 \leqslant \rho^*(y) \leqslant 3).\end{cases}$$

综上所述，对一切 $x\in\mathbb{R}$ 与 $y>0$,成立

$$\begin{cases}D(x+iy) < 2\rho^*(y), (\rho^*(y) > 3)\\ D(x+iy) < 2\rho^*(y)+1, (1 \leqslant \rho^*(y) \leqslant 3).\end{cases}$$

由上述定理,立刻得到下面两个推论

推论 1　设 $h(x): R \to R$ 是 $\rho(t)$-拟对称同胚，若 $\rho(t)$在$(0,r)$单调递减，且当 $t \to 0^+$ 时，$\rho(t)$允许以任意增长阶趋于 $+\infty$，则存在 $\delta>0$，使 $h(x)$的 Beurling-Ahlfors 扩张 $\phi(z)$在 $z=x+iy$ 的伸缩商有估计式

$$D(x+iy) \leqslant 2\rho\left(\frac{y}{2}\right),\ x \in \mathbb{R},\ y \in (0,\delta).$$

推论 1 改进了文献[3]的结果.

推论 2　设 $h(x): R \to R$ 是 $\rho(t)$—拟对称同胚，若 $\rho(t)$在$(A,+\infty)$单调递增，且当 $t \to +\infty$时，$\rho(t)$允许以任意增长阶趋于 $+\infty$，则存在 $K>0$，使 $h(x)$的 Beurling-Ahlfors 扩张 $\phi(z)$在 $z=x+iy$ 的伸缩商有估计式

$$D(x+iy) \leqslant 2\rho(y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in (K,+\infty).$$

注　如果 $\rho(t)$是常数，本文实际上给出了经典的 Beurling-Ahlfors 扩张伸缩商的一个简化证明.

参　考　文　献

1 Beurling A, Ahlfors L V. The boundary correspondence under quasiconformal mappings. Acta Math, 1956: 125

2 Lehtinen M. The dilatation of Beurling-Ahlfors extensions of quasisymmetric functions. Ann Acad Sci Fenn, Ser AI Math, 1983, 8: 187

3 Chen J X, Chen Z G, He C Q. The boundary correspondence under $\mu(z)$-homeomorphisms. Michigan Math J, 1996, 43: 211

4 Ahlfors L V. Lectures on Quasiconformal Mappings. New York: Van Nostrand, 1966